22/02/2018

Στατιστική Συμπερασματολογία

Μάθημα 6ο   Πέμπτη 9-11 / Τρίτη 9-11.
ώρες γραφείου.

users.uoi.gr/abatsidis
26510 08232
abatsidis@uoi.gr.

Συγγράμματα Ευδοξος { Παπαϊωάννου Φερεντίνου. Εκδ. Σταμούλη.
- Γ. Ηλιόπουλος (2/3 ύλης)

Επιπλέον: - Δαμιανού
- Κολυβά - Μαχαιρά
- Ρούσσα
} Ενδεικτικά (στη βιβλιοθήκη)

repository.kallipos.gr

βιβλία: Κουρούκλης, Πετρόπουλος, Πιπερίγκου
Θέματα Παραμετρικής Στατ. Συμπ/σης
(Δεν έχει έλεγχ. υποθέσεων)

Βασικές Έννοιες της Στατιστικής Συμπερασματολογίας

<u>Πληθυσμός</u>: Είναι το σύνολο των οντοτήτων των οποίων ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα ή περισσότερα θέλουμε να μελετήσουμε.
Το χαρακτηριστικό γνώρισμα του πληθυσμού που μεταβάλλεται από μέλος σε μέλος λέγεται τυχαία μεταβλητή και τυχαίο διάνυσμα στη περίπτωση των περισσότερων.

Συλλέγουμε κάποια αριθμητικά δεδομένα από τον πληθυσμό που μελετούμε που αφορούν τον υπό μελέτη πληθυσμό.

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα, δηλ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., από έναν πληθυσμό με σ.π.π. (σε περίπτωση συνεχών τ.μ.) ή σ.π. (διακρ. τ.μ.) $f(x;\theta)$, δηλ. γνωρίζουμε τη συναρτησιακή μορφή της σ.π.π. ή της σ.π. η οποία όμως εξαρτάται από μία άγνωστη σταθερά θ η οποία με τη σειρά της (παίρνει τιμές) ανήκει σ' ένα $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$.
Η άγνωστη σταθερά λέγεται παράμετρος ενώ το σύνολο Θ λέγεται παραμετρικός χώρος. (δηλ. σύνολο δυνατών τιμών της παραμ. θ).

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$

↳ άγνωστη σταθερά → παράμετρος

Παραδείγματα

(1) X: χρόνος ζωής μπαταριών αυτ/του.
Υποθέτω ότι $X \sim Εκθ(\lambda)$ (Η κανονική θα είχε τιμές $(-\infty, +\infty)$)
Τότε: (1) $f(x;\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ (θα δίνεται)
Εδώ (2) $\theta = \lambda$, $\lambda > 0$

Άρα: (3) $\Theta = (0, +\infty)$

Έχω ορίσει - συναρτησιακή μορφή
- παράμετρο
- παραμετρικός χώρος.

(2) Έστω X: το βάρος ενός παιδιού προσχολικής ηλικίας
Υποθέτω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
(1) $f(x;\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$
$x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$
Το θ είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων.
Εδώ είναι δισδιάστατος.

(2) $\theta = (\mu, \sigma^2)$

(3) $\Theta = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με σ.π.π. ή σ.π $f(x,\theta)$
Η από κοινού κατανομή των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ δίνεται από τη σχέση:
(ισχύς μοντελοποιεί την από κοινού συμπεριφορά των $X_1, \ldots X_n$)

π.χ. $P(A \cup B) = P(A)P(B)$
όταν A, B ανεξ.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n ; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta)$$

ανεξάρτητες.

Το γινόμενο των περιθωρίων.

$\boxed{\rightarrow}$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. Εκθ. (λ)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n / \lambda) = f(\underset{\sim}{x} / \lambda) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda \cdot e^{-\lambda x_i}}_{f(x_i/\lambda)} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x_2} \cdots \lambda \cdot e^{-\lambda x_n} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ορισμός

Μια συνάρτηση των $X_1, X_2, \dots, X_n$ που δεν εξαρτάται από το θ (και από άλλες άγνωστες ποσότητες) ονομάζεται στατιστική συνάρτηση $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$

π.χ.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = \mu$
σ^2: γνωστή

$\longrightarrow \sum (X_i - \mu)^2$ Δεν είναι στατιστική συν/ση
έχει το $\mu \Rightarrow$ εξ. από το θ.

$\longrightarrow \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$ είναι σ.σ.

Παραμετρική συνάρτηση:
οποιαδήποτε συνάρτηση της παραμέτρου θ και γνωστών ποσοτήτων.

Δηλ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2) = (\theta_1, \theta_2)$

οι $g(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$

$g(\theta) = \mu + \sigma^2$

$g(\theta) = \mu + 7$

είναι παραμετρικές συναρτήσεις

↓

(Δεν έχω το x)

Εκτιμητής:
Είναι οποιαδήποτε στατιστική συνάρτηση η οποία χρησιμοποιείται για την εκτίμηση μιας παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$.
Επιθυμητή ιδιότητα είναι το σύνολο τιμών της να είναι το ίδιο με αυτό της εκτιμώμενης παραμετρικής συνάρτησης.
(Δεν θέλω στον εκτιμητή να έχω άγνωστα μέσα)

Εκτίμηση: Η τιμή που προκύπτει για τη στατιστική συνάρτηση $T(X_1, X_2, \ldots X_n)$ όταν αντικατασταθούν τα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από τα δεδομένα μας.

π.χ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ εκτιμητής ;;;
$X_1, X_2, \ldots, X_n$. Τότε $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

η τιμή που προκύπτει λέγεται εκτίμηση.

51, 72, 83, 84

διάμεσος $\rightarrow \dfrac{72+83}{2}$ | μέση τιμή $\rightarrow \dfrac{51+72+83+84}{4}$

$T(\underset{\sim}{X})$ εκτιμητής της $g(\theta)$

Θέλω να αξιολογήσω τον εκτιμητή

1º πρόβλημα

Θέλουμε το $T(\underset{\sim}{X})$ να είναι "κοντά" στο αληθινό $g(\theta)$ Μπορώ να το καταφέρω;

"κοντά"
- με ποια έννοια;
- με ποιο κριτήριο;
- με ποια μεζούρα;

} προβλήματα

απόλυτο σφάλμα : $|T(\underset{\sim}{X}) - g(\theta)|$

τετραγωνικό σφάλμα : $(T(\underset{\sim}{X}) - g(\theta))^2$

} βοήθεια για το "κοντά"

όμως: Το $g(\theta) \rightarrow$ Δε το ξέρω !!! και επιπλέον θέλω να είναι κοντά $\boxed{\forall \theta \in \Theta}$

Άρα δε μπορώ να χρησιμοποιήσω μεθόδους της αρθ. Άλγεβρας με τα σφάλματα.

2º πρόβλημα

$T(\underset{\sim}{X}) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Τα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τ.μ.

⇒ Άρα έχει τυχαιότητα το $T(\underset{\sim}{X})$

⇒ πρόβλημα

Άρα: Ο τρόπος για να ξεπεράσουμε την τυχαιότητα είναι να "βάλουμε" μέσες τιμές.

Μέσο απόλυτο σφάλμα:

$$E\left(\left|T(\underset{\sim}{x}) - g(\theta)\right|\right)$$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$E\left(\left(T(\underset{\sim}{x}) - g(\theta)\right)^2\right)$$

Πρόταση

Έστω $T(\underset{\sim}{X})$ ένας εκτιμητής της $g(\theta)$

Τότε $M.T.\Sigma.\left(T(\underset{\sim}{x}); g(\theta)\right)$

$$= E\left(T(\underset{\sim}{x}) - g(\theta)\right)^2$$

ή ισοδύναμα

$$M.T.\Sigma.\left(T(\underset{\sim}{x}), g(\theta)\right) = Var\, T(\underset{\sim}{x}) + \left\{ E T(\underset{\sim}{x}) - g(\theta) \right\}^2$$

$\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2$

$\mathrm{Var}(c) = 0$

$E(X+c) = EX + c$

Απόδειξη

$$MT\Sigma\,(T(x);\, g(\theta)) = E\,(T(\underline{x}) - g(\theta))^2 =$$

$$= \mathrm{Var}\,(T(x) - \overbrace{g(\theta)}^{\text{σταθερά}}) + \{E(T(x) - g(\theta))\}^2$$

$$= \mathrm{Var}\,(T(x)) + \{E\,T(x) - g(\theta)\}^2$$

Κριτήριο

Έστω $T_1(\underline{X})$ και $T_2(\underline{X})$ εκτιμητές της $g(\theta)$.

Ο $T_1(\underline{X})$ είναι καλύτερος από τον $T_2(\underline{X})$ με κριτήριο το Μ.Τ.Σ. αν:

$$MT\Sigma\,(T_1(\underline{X}), g(\theta)) \leq M.T\Sigma.\,(T_2(\underline{X}), g(\theta)) \quad \forall \theta \in \Theta$$

<u>και</u>

$$MT\Sigma\,(T_1(\underline{X}), g(\theta)) < MT\Sigma.\,(T_2(\underline{X}), g(\theta))$$

<u>για κάποιο</u> $\theta \in \Theta$

Δηλ. θα ισχύει γνήσια τουλάχιστον μία φορά η ανισότητα

Ορισμός

Ένας εκτιμητής λέγεται <u>αποδεκτός/παραδεκτός/βέλτιστος</u> με βάση το <u>Μ.Τ.Σ.</u> <u>αν δεν υπάρχει καλύτερός του</u>.

Ερώτημα

Υπάρχει βέλτιστος εκτιμητής με κριτήριο το Μ.Τ.Σ. ;

Πρόταση

Δεν υπάρχει βέλτιστος εκτιμητής της μη σταθερής παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ με κριτήριο το Μ.Τ.Σ.

(Για σταθερή δεν έχει νόημα η εκτίμηση έτσι κι αλλιώς)

Η υπόθεση της μη σταθερής παρ/κής συν/σης δεν είναι καθόλου δεσμευτικό καθώς από το φυσικό μας πρόβλημα δεν ενδιαφερόμαστε για συναρτήσεις της μορφής $g(\theta) = a$.

τεχνική της απόδειξης

Απόδειξη

Έστω ότι $\exists$ βέλτιστος εκτιμητής της $g(\theta)$ και είναι ο $T^*(\underline{X})$.

Η $g(\theta)$ είναι μη σταθ. συνάρτηση.

Άρα υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ με $\theta_1 \neq \theta_2$ τ.ω. $g(\theta_1) \neq g(\theta_2)$

$T^*(\underline{X})$ βέλτιστος σημαίνει :

(*) $M.T.\Sigma.(T^*(\underline{X}), g(\theta)) \leq MT\Sigma(T(\underline{X}), g(\theta))$ $\forall \theta, \forall T(\underline{X})$

Επιλέγω $T(X) = g(\theta_1)$

(**) Άρα: $M.T.\Sigma.(T^*(X), g(\theta)) \leq E(g(\theta_1) - g(\theta))^2$ $\forall \theta$

Η (**) για $\theta = \theta_2$:

$$MTS\,(T^*(X), g(\theta_1)) \leq 0$$

Όμοια για $T(X) = g(\theta_2)$:

$$MTS\,(T^*(x), g(\theta)) \leq E\,(g(\theta_2) - g(\theta))^2 \ \forall \theta$$

και για $\theta = \theta_2$:

$$MTS\,(T^*(x), g(\theta_2)) \leq 0$$

Άρα:

$$\left\{\begin{array}{l} \textcircled{1}\ MTS\,(T^*(\underline{x}), g(\theta_1)) \leq 0 \\ \textcircled{2}\ MTS\,(T^*(X), g(\theta_2)) \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\textcircled{1} = E\,(T^*(\underline{x}) - g(\theta_1))^2 \geq 0$$
$$\textcircled{2} = E\,(T^*(X) - g(\theta_2))^2 \geq 0$$

Άρα αναγκαστικά ισχύει η ισότητα. $\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} MTS\,(T^*(\underline{X}), g(\theta_1))^2 = 0 \\ MTS\,(T^*(X), g(\theta_2))^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} T^*(X) = g(\theta_1) \\ T^*(X) = g(\theta_2) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow g(\theta_1) = g(\theta_2) \quad \underline{\text{άτοπο}}$$

■

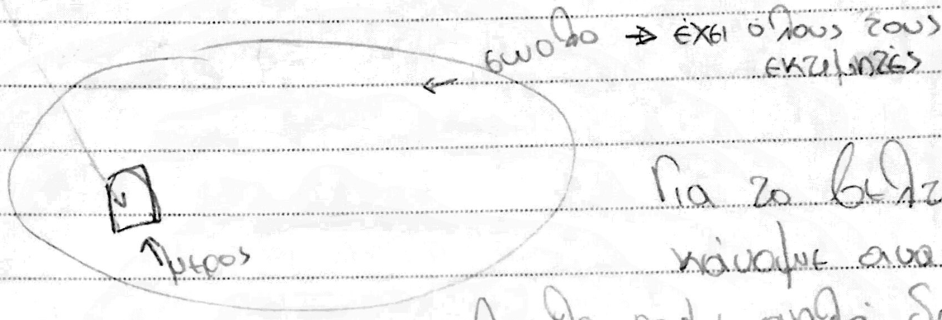
(ii) Y μη αρνητική τ.μ. $EY=0$, $P(Y=0)=1$.

Μια μη αρνητική ποσότητα που έχει μέση τιμή $=0$ $\Rightarrow$ τότε αναγκαστικά αυτή η ποσότητα $=0$

$\Rightarrow$ $M.T.Σ.(T(\underline{X}), g(\theta)) = Var(T(\underline{X})) + [ET(X) - g(\theta)]^2$

Δείξαμε ότι ∄ βέλτιστος εκτιμητής με βάση το Μ.Τ.Σ.

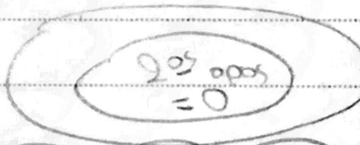
$T(X) = \{a_i X_i\}$ να βρεθεί ο βέλτιστος εκτιμητής



Για το βέλτιστο θα κάναμε αναζήτηση.
Δεν θα πάμε απλά δεν υπάρχει

Πώς ξεπερνάω το πρόβλημα;

Περιορίζομαι εκεί όπου ο $2^{ος}$ όρος μηδενίζεται και επομένως θέλω να ελαχιστοποιήσω την $Var(T(\underline{X}))$



Ορισμός

Ένας εκτιμητής $T(X)$ θα λέγεται αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ αν η αναμενόμενη τιμή του $T(x)$ είναι ίση με το $g(\theta)$, δηλ. $\boxed{E(T(x)) = g(\theta)}$ $\forall \theta \in \Theta$.

Η ποσότητα $ET(x) - g(\theta)$ λέγεται ποσό μεροληψίας της $T(x)$ για την εκτίμηση της $g(\theta)$

Περιορίζω το πρόβλημα μου σε αμερόληπτους εκτιμητές.

Ερώτημα

Τι σημαίνει πρακτικά αμεροληψία;

Η σχέση $E(T(x)) = g(\theta)$ λέει ότι "κατά μέσο όρο" η σ.Τ παίρνει την τιμή $g(\theta)$

Παράδειγμα

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την διωνυμική $B(1,p)$. Ν.δ.ο. $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ αμερόληπτος της πιθ. p.

Θέλω ν.δ.ο. $\underline{E(\bar{X}) = p}$ αμεροληψία

$$E\bar{X} = E\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p}{n} = p$$

από τυπολόγιο.

$\Rightarrow$ $E(T(\underline{x})) = g(\theta)$ (*)

Παίρνω δείγμα: $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots X_n^{(1)}$

$\xrightarrow{f(x;\theta)}$ $T^{(1)}(X_1^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)})$

$X_1^{(2)}, X_2^{(2)} \ldots X_n^{(2)} \longrightarrow T^{(2)}(X_1^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)})$

$\vdots$

$X_1^{(10.000)}, \ldots X_n^{(10.000)} \longrightarrow T^{(10.000)}(X_1^{(10.000)}, \ldots, X_n^{(10.000)})$

Πρακτικά αμεροληψία:
αν επαναλάβω τη διαδικασία πολλές φορές ο μέσος όρος είναι κοντά (στο $g(\theta)$) σε αυτό που εκτιμάται.
δηλ. ο μέσος όρος του εκτιμητή να πλησιάζει σε αυτό που εκτιμάται.

$$\text{M.O} \rightarrow g(\theta)$$

Δε μπορούσα να βρούμε βέλτιστο
→ Περιοριζόμαστε στους αμερόληπτους

Άσκηση (π.χ.)
Να δείξετε ότι ο δειγματικός μέσος είναι αμερόληπτος εκτιμητής της πληθυσμιακής μέσης τιμής της με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2/n.

Λύση: $X_1, X_2 \ldots X_n$ τ.δ. $f(x;\theta)$

$$\boxed{\begin{aligned} E\bar{X} &= EX = \mu \\ Var\,\bar{X} &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}}$$

$$E\bar{X} = E\,\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\,\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var X_i =$$

τ.δ. ⇒ ανεξάρτητες !

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Παράδειγμα $X_1, X_2, \ldots X_n$ τ.δ. $f(x;\theta)$

Ν.δ.ο. οι δειγματικές ροπές κ-τάξης περί το μηδέν $\to m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των αντίστοιχων πληθυσμιακών $\to \mu_k = EX^k$

Λύση

$$E m_k = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overbrace{EX_i^k}^{\mu_k} = \mu_k$$

Πρόταση (Χρήσιμη)

(α) Έστω $T(\underset{\sim}{X})$ αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$

τότε:

$a \cdot T(x) + b$, με a, b σταθερές

αμερόληπτος της ;

$a \cdot g(\theta) + b$

(β) Έστω
$$\left.\begin{array}{l} T_1(\underset{\sim}{X}) \text{ αμερόληπτος της } g_1(\theta) \\ T_2(\underset{\sim}{X}) \text{ αμερόληπτος της } g_2(\theta) \\ \vdots \\ T_k(\underset{\sim}{X}) \text{ αμερόληπτος της } g_k(\theta) \end{array}\right\}$$

Τότε:

$\sum_{i=1}^{k} a_i T_i(\underset{\sim}{X})$ αμερόληπτος της $\sum_{i=1}^{k} a_i g_i(\theta)$

με a_i σταθερές

Απόδειξη.

(a) Θ.Δ.ο. $E(aT(x)+b) = a\cdot g(\theta)+b$.

Είναι $E(a\cdot T(\underline{X})+b) = a\cdot E\,T(X)+b =$

αμερόληπτος της $g(\theta)$

$= a\cdot g(\theta)+b$.

(b) Θ.Δ.ο. $E\sum_{i=1}^{k} a_i T_i(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{k} a_i g_i(\theta)$

Είναι $E\sum_{i=1}^{k} a_i T_i(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{k} a_i\, E\,T_i(\underline{X}) =$ → της $g_i(\theta)$

$= \sum_{i=1}^{k} a_i\, g_i(\theta)$

π.χ.
ζητάει τον αμερόληπτο της $\theta(\theta-1)$
$\Rightarrow$ μπορώ: $\theta(\theta-1) \overset{\text{πράξ.}}{=} \theta^2-\theta$

βρίσκω αμερόληπτο για θ^2 → T_1

αμερόληπτο για θ → T_2

πρόσθεση → τέλος

Σπίτι

Άσκηση 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την κανονική $N(\theta, \sigma^2)$.
Να υπολογιστεί το Μ.Τ.Σ. $(\bar{X}, \theta)$

Άσκηση 2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την διωνυμική $B(1, \theta)$.
Να υπολογιστεί το Μ.Τ.Σ. $(\bar{X}, \theta)$

Για παράδοση

Κατανομή-Συμβολισμός	Σ.Π.Π ή Σ.Π.	EX	$VarX$	$m_X(t)$
Διωνυμική B(n,p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,\ldots,n$	np	$np(1-p)$ $X = \Sigma X_i$	$\left[pe^t + (1-p)\right]^n, t \in R$
Γεωμετρική Geo(p)	$p(1-p)^{x-1}, x = 1,2,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$, $t < -\ln(1-p)$
Αρνητική Διωνυμική NB(r,p)	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$, $x = r, r+1,\ldots$	r/p	$r(1-p)/p^2$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$, $t < -\ln(1-p)$
Υπεργεωμετρική (N,M,n)	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, $x = 0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	-
Poisson (λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0,1,\ldots.$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}, t \in R$
Ομοιόμορφη $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, x \in (a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, t \in R$
Εκθετική (λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), t < \lambda$
Γάμμα (α,β)	$\frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, x \geq 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$(1-\beta t)^{-a}, t < \frac{1}{\beta}$
Βήτα (α, β)	$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}, 0 < x < 1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	-
Κανονική $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in R$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
X_n^2	Γάμμα (n/2,2)	n	$2n$	$(1-2t)^{-n/2}, t < \frac{1}{2}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ

Ο πίνακας δίνει πιθανότητες της μορφής $P(0 \le Z \le z)$ **όταν** $Z \sim N(0,1)$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3 770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990